Kompleksna analiza

Pavle Pandžić, 1. predavanje

Osnovni pojmovi i definicije

U kompleksnoj analizi radimo s poljem kompleksnih brojeva

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi \,\big|\, x, y \in \mathbb{R}\},$$

gdje je i imaginarna jedinica, $i^2 = -1$.

Osnovni pojmovi i definicije

U kompleksnoj analizi radimo s poljem kompleksnih brojeva

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi \,\big|\, x, y \in \mathbb{R}\},$$

gdje je i imaginarna jedinica, $i^2 = -1$.

Kompleksne brojeve zbrajamo i množimo kao polinome:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$
$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Osnovni pojmovi i definicije

Lako se provjerava da je uz ovako definirane operacije $\mathbb{C}$ polje.

Osnovni pojmovi i definicije

Lako se provjerava da je uz ovako definirane operacije $\mathbb{C}$ polje.

Pri tome je neutral za zbrajanje $0 = 0 + 0i$;

Osnovni pojmovi i definicije

Lako se provjerava da je uz ovako definirane operacije $\mathbb{C}$ polje.

Pri tome je neutral za zbrajanje $0 = 0 + 0i$;

broj suprotan broju $z = a + bi$ je $-z = -a - bi$;

Osnovni pojmovi i definicije

Lako se provjerava da je uz ovako definirane operacije $\mathbb{C}$ polje.

Pri tome je neutral za zbrajanje $0 = 0 + 0i$;

broj suprotan broju $z = a + bi$ je $-z = -a - bi$;

neutral za množenje je $1 = 1 + 0i$;

Osnovni pojmovi i definicije

Lako se provjerava da je uz ovako definirane operacije $\mathbb{C}$ polje.

Pri tome je neutral za zbrajanje $0 = 0 + 0i$;

broj suprotan broju $z = a + bi$ je $-z = -a - bi$;

neutral za množenje je $1 = 1 + 0i$;

multiplikativni inverz broja $z = a + bi \neq 0$ je

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Osnovni pojmovi i definicije

Realne brojeve x i y nazivamo **realnim** i **imaginarnim dijelom** od $z = x + yi$ i označavamo ih s $\mathrm{Re}\, z$ i $\mathrm{Im}\, z$.

Osnovni pojmovi i definicije

Realne brojeve x i y nazivamo **realnim** i **imaginarnim dijelom** od $z = x + yi$ i označavamo ih s $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$.

Konjugirani kompleksni broj broja $z = x + yi$ definiramo kao

$$\bar{z} = x - yi.$$

Osnovni pojmovi i definicije

Realne brojeve x i y nazivamo **realnim** i **imaginarnim dijelom** od $z = x + yi$ i označavamo ih s $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$.

Konjugirani kompleksni broj broja $z = x + yi$ definiramo kao

$$\bar{z} = x - yi.$$

Jasno je da vrijedi

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Osnovni pojmovi i definicije

Realne brojeve x i y nazivamo **realnim** i **imaginarnim dijelom** od $z = x + yi$ i označavamo ih s $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$.

Konjugirani kompleksni broj broja $z = x + yi$ definiramo kao

$$\bar{z} = x - yi.$$

Jasno je da vrijedi

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Modul ili apsolutnu vrijednost kompleksnog broja $z = x + yi$ definiramo s

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Osnovni pojmovi i definicije

Skupove $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ identificiramo na uobičajeni način:

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Osnovni pojmovi i definicije

Skupove $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ identificiramo na uobičajeni način:

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

To nam omogućava prikazivanje kompleksnih brojeva u ravnini.

Osnovni pojmovi i definicije

Skupove $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ identificiramo na uobičajeni način:

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

To nam omogućava prikazivanje kompleksnih brojeva u ravnini.

Argument kompleksnog broja $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiramo kao realni broj $\varphi \in (-\pi, \pi]$ koji predstavlja veličinu kuta između pozitivnog dijela osi x i zrake iz ishodišta koja prolazi kroz z. Oznaka: $\varphi = \arg z$.

Osnovni pojmovi i definicije

Lako se vidi da za svaki $z \neq 0$ vrijedi

$$x = \operatorname{Re} z = |z| \cos \varphi, \quad y = \operatorname{Im} z = |z| \sin \varphi,$$

pa je

$$z = x + iy = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z| e^{i\varphi},$$

gdje smo uveli oznaku $e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi$. (ovo je zasad samo oznaka, a kasnije ćemo vidjeti da je to stvarno vrijednost eksponencijalne funkcije na $i\varphi$.)

Osnovni pojmovi i definicije

Lako se vidi da za svaki $z \neq 0$ vrijedi

$$x = \operatorname{Re} z = |z| \cos \varphi, \quad y = \operatorname{Im} z = |z| \sin \varphi,$$

pa je

$$z = x + iy = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z| e^{i\varphi},$$

gdje smo uveli oznaku $e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi$. (ovo je zasad samo oznaka, a kasnije ćemo vidjeti da je to stvarno vrijednost eksponencijalne funkcije na $i\varphi$.)

Ovaj zapis kompleksnog broja nazivamo trigonometrijskim zapisom. Za interval vrijednosti argumenta kompleksnog broja može se uzeti i neki drugi interval duljine 2π, npr. često se uzima $[0, 2\pi)$.

Osnovni pojmovi i definicije

Pomoću identifikacije $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ možemo na $\mathbb{C}$ prenijeti sve topološke pojmove koje znamo na $\mathbb{R}^2$, kao što su udaljenost, kugle (krugovi), otvoreni i zatvoreni skupovi, kompaktni i povezani skupovi, te konvergencija nizova i neprekidnost funkcija.

Osnovni pojmovi i definicije

Pomoću identifikacije $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ možemo na $\mathbb{C}$ prenijeti sve topološke pojmove koje znamo na $\mathbb{R}^2$, kao što su udaljenost, kugle (krugovi), otvoreni i zatvoreni skupovi, kompaktni i povezani skupovi, te konvergencija nizova i neprekidnost funkcija.

Udaljenost točaka $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dana je sa

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Osnovni pojmovi i definicije

Pomoću identifikacije $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}^2$ možemo na $\mathbb{C}$ prenijeti sve topološke pojmove koje znamo na $\mathbb{R}^2$, kao što su udaljenost, kugle (krugovi), otvoreni i zatvoreni skupovi, kompaktni i povezani skupovi, te konvergencija nizova i neprekidnost funkcija.

Udaljenost točaka $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dana je sa

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Vrijedi nejednakost trokuta:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Osnovni pojmovi i definicije

Otvoren krug s centrom u $z_0 \in \mathbb{C}$ radijusa $r > 0$ je skup

$$K(z_0, r) \stackrel{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

tj. skup svih kompleksnih brojeva z koji su udaljeni od z_0 za manje od r.

Osnovni pojmovi i definicije

Otvoren krug s centrom u $z_0 \in \mathbb{C}$ radijusa $r > 0$ je skup

$$K(z_0, r) \stackrel{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

tj. skup svih kompleksnih brojeva z koji su udaljeni od z_0 za manje od r.

Zatvoren krug s centrom u $z_0 \in \mathbb{C}$ radijusa $r > 0$ je skup

$$\overline{K}(z_0, r) \stackrel{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

Osnovni pojmovi i definicije

Otvoren krug s centrom u $z_0 \in \mathbb{C}$ radijusa $r > 0$ je skup

$$K(z_0, r) \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

tj. skup svih kompleksnih brojeva z koji su udaljeni od z_0 za manje od r.

Zatvoren krug s centrom u $z_0 \in \mathbb{C}$ radijusa $r > 0$ je skup

$$\overline{K}(z_0, r) \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

Kružnica s centrom u $z_0 \in \mathbb{C}$ radijusa $r > 0$ je skup

$$S(z_0, r) = \partial K(z_0, r) \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Osnovni pojmovi i definicije

Otvoren krug s centrom u $z_0 \in \mathbb{C}$ radijusa $r > 0$ je skup

$$K(z_0, r) \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}\,,$$

tj. skup svih kompleksnih brojeva z koji su udaljeni od z_0 za manje od r.

Zatvoren krug s centrom u $z_0 \in \mathbb{C}$ radijusa $r > 0$ je skup

$$\overline{K}(z_0, r) \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}\,.$$

Kružnica s centrom u $z_0 \in \mathbb{C}$ radijusa $r > 0$ je skup

$$S(z_0, r) = \partial K(z_0, r) \overset{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}\,.$$

Očito je $S(z_0, r) = \left\{z = z_0 + re^{i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi)\right\}$.

Osnovni pojmovi i definicije

Skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otvoren ako je ili prazan ili za svaku točku $z \in \Omega$ postoji $r_z > 0$ tako da je $K(z, r_z) \subseteq \Omega$.

Osnovni pojmovi i definicije

Skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otvoren ako je ili prazan ili za svaku točku $z \in \Omega$ postoji $r_z > 0$ tako da je $K(z, r_z) \subseteq \Omega$.

Skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je zatvoren ako je njegov komplement $\Omega^c = \mathbb{C} \setminus \Omega$ otvoren.

Osnovni pojmovi i definicije

Skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otvoren ako je ili prazan ili za svaku točku $z \in \Omega$ postoji $r_z > 0$ tako da je $K(z, r_z) \subseteq \Omega$.

Skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je zatvoren ako je njegov komplement $\Omega^c = \mathbb{C} \setminus \Omega$ otvoren.

U ovim predavanjima Ω uvijek označava otvoren skup.

Osnovni pojmovi i definicije

Skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je otvoren ako je ili prazan ili za svaku točku $z \in \Omega$ postoji $r_z > 0$ tako da je $K(z, r_z) \subseteq \Omega$.

Skup $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je zatvoren ako je njegov komplement $\Omega^c = \mathbb{C} \setminus \Omega$ otvoren.

U ovim predavanjima Ω uvijek označava otvoren skup.

Skup $S \subseteq \mathbb{C}$ je ograničen ili omeđen ako postoji $M > 0$ tako da je $|z| \leq M$ za sve $z \in S$, to jest, $S \subseteq \overline{K}(0, M)$.

Osnovni pojmovi i definicije

Skup $K \subseteq \mathbb{C}$ je kompaktan ako je zatvoren i ograničen.

Osnovni pojmovi i definicije

Skup $K \subseteq \mathbb{C}$ je kompaktan ako je zatvoren i ograničen.

Zatvoren krug i kružnica su primjeri kompaktnih skupova.

Osnovni pojmovi i definicije

Skup $K \subseteq \mathbb{C}$ je kompaktan ako je zatvoren i ograničen.

Zatvoren krug i kružnica su primjeri kompaktnih skupova.

Ekvivalentno, skup K je kompaktan ako i samo ako za svaki njegov otvoren pokrivač postoji konačan potpokrivač.

Osnovni pojmovi i definicije

Skup $K \subseteq \mathbb{C}$ je kompaktan ako je zatvoren i ograničen.

Zatvoren krug i kružnica su primjeri kompaktnih skupova.

Ekvivalentno, skup K je kompaktan ako i samo ako za svaki njegov otvoren pokrivač postoji konačan potpokrivač.

Otvoren skup Ω u $\mathbb{C}$ je povezan ako se ne može napisati kao disjunktna unija dva otvorena neprazna skupa.

Osnovni pojmovi i definicije

Vrijedi da je otvoren skup Ω povezan ako i samo ako je povezan putevima, tj. za svake dvije točke $z, w \in \Omega$ postoji neprekidno preslikavanje $\gamma : [a, b] \to \Omega$ (koje nazivamo putem) tako da $\gamma(a) = z$ i $\gamma(b) = w$.

Osnovni pojmovi i definicije

Vrijedi da je otvoren skup Ω povezan ako i samo ako je povezan putevima, tj. za svake dvije točke $z, w \in \Omega$ postoji neprekidno preslikavanje $\gamma : [a, b] \to \Omega$ (koje nazivamo putem) tako da $\gamma(a) = z$ i $\gamma(b) = w$.

Pri tome neprekidnost od γ znači da je γ neprekidno preslikavanje s $[a, b]$ u $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Osnovni pojmovi i definicije

Vrijedi da je otvoren skup Ω povezan ako i samo ako je povezan putevima, tj. za svake dvije točke $z, w \in \Omega$ postoji neprekidno preslikavanje $\gamma : [a, b] \to \Omega$ (koje nazivamo putem) tako da $\gamma(a) = z$ i $\gamma(b) = w$.

Pri tome neprekidnost od γ znači da je γ neprekidno preslikavanje s $[a, b]$ u $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Otvoren skup Ω koji je ujedno i povezan naziva se područjem.

Osnovni pojmovi i definicije

Vrijedi da je otvoren skup Ω povezan ako i samo ako je povezan putevima, tj. za svake dvije točke $z, w \in \Omega$ postoji neprekidno preslikavanje $\gamma : [a, b] \to \Omega$ (koje nazivamo putem) tako da $\gamma(a) = z$ i $\gamma(b) = w$.

Pri tome neprekidnost od γ znači da je γ neprekidno preslikavanje s $[a, b]$ u $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Otvoren skup Ω koji je ujedno i povezan naziva se područjem.

Na primjer, svaki otvoren krug je područje. Unija dva disjunktna otvorena kruga nije područje, već samo otvoren skup kojemu su ta dva kruga komponente povezanosti.

Osnovni pojmovi i definicije

Ukoliko Ω nije povezan, može se napisati na jedinstven način kao prebrojiva (moguće konačna) unija disjunktnih područja, koje nazivamo komponentama povezanosti od Ω.

Osnovni pojmovi i definicije

Ukoliko Ω nije povezan, može se napisati na jedinstven način kao prebrojiva (moguće konačna) unija disjunktnih područja, koje nazivamo komponentama povezanosti od Ω.

Niz kompleksnih brojeva (z_n) konvergira prema kompleksnom broju z_0, pišemo $\lim_n z_n = z_0$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_ε (ovisan o ε) tako da vrijedi

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon,$$

Osnovni pojmovi i definicije

Ukoliko Ω nije povezan, može se napisati na jedinstven način kao prebrojiva (moguće konačna) unija disjunktnih područja, koje nazivamo komponentama povezanosti od Ω.

Niz kompleksnih brojeva (z_n) konvergira prema kompleksnom broju z_0, pišemo $\lim_n z_n = z_0$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_ε (ovisan o ε) tako da vrijedi

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon,$$

ili ekvivalentno

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow z_n \in K(z_0, \varepsilon).$$

Osnovni pojmovi i definicije

Ako je $z_n = x_n + iy_n, n \in \mathbb{N}$ i $z_0 = x_0 + iy_0$ tada vrijedi:

$$\lim_n z_n = z_0 \Leftrightarrow (\lim_n x_n = x_0 \text{ i } \lim_n y_n = y_0).$$

Osnovni pojmovi i definicije

Ako je $z_n = x_n + iy_n, n \in \mathbb{N}$ i $z_0 = x_0 + iy_0$ tada vrijedi:

$$\lim_n z_n = z_0 \Leftrightarrow (\lim_n x_n = x_0 \text{ i } \lim_n y_n = y_0).$$

Na primjer, ako je $z_n = \frac{\sin n}{n} + i\frac{n^2+1}{2n^2-1}, n \in \mathbb{N}$ tada je

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} + i \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2-1} = \frac{1}{2} i.$$

Osnovni pojmovi i definicije

U ovom će nas kolegiju prvenstveno zanimati kompleksne funkcije kompleksne varijable, odnosno funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$, gdje je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$.

Osnovni pojmovi i definicije

U ovom će nas kolegiju prvenstveno zanimati kompleksne funkcije kompleksne varijable, odnosno funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$, gdje je Ω otvoren skup u $\mathbb{C}$.

Takva funkcija f je neprekidna u $z_0 \in \Omega$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da $K(z_0, \delta) \subseteq \Omega$ i

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

ili ekvivalentno

$$z \in K(z_0, \delta) \Rightarrow f(z) \in K(f(z_0), \varepsilon).$$

Osnovni pojmovi i definicije

Funkcija f je neprekidna na Ω ako je neprekidna u svakoj točki skupa Ω.

Osnovni pojmovi i definicije

Funkcija f je neprekidna na Ω ako je neprekidna u svakoj točki skupa Ω.

Neprekidnost funkcije f u z_0 ekvivalentna je tome da za svaki niz (z_n) u Ω,

$$\lim_n z_n = z_0 \quad \Rightarrow \lim_n f(z_n) = f(z_0).$$

Osnovni pojmovi i definicije

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Koristimo identifikaciju $z = x + yi = (x, y)$, te uvodimo oznake

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\ f(x + yi), \quad v(x, y) = \mathrm{Im}\ f(x + yi).$$

Osnovni pojmovi i definicije

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Koristimo identifikaciju $z = x + yi = (x, y)$, te uvodimo oznake

$$u(x, y) = \text{Re } f(x + yi), \quad v(x, y) = \text{Im } f(x + yi).$$

Tako dobijemo funkcije

$$u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

koje nazivamo **realnim i imaginarnim dijelom od** f.

Osnovni pojmovi i definicije

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Koristimo identifikaciju $z = x + yi = (x, y)$, te uvodimo oznake

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\ f(x + yi), \quad v(x, y) = \mathrm{Im}\ f(x + yi).$$

Tako dobijemo funkcije

$$u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

koje nazivamo **realnim i imaginarnim dijelom od** f.

Pišemo

$$u = \mathrm{Re}\ f, \quad v = \mathrm{Im}\ f, \quad f = u + vi.$$

Osnovni pojmovi i definicije

Funkciju f možemo shvaćati i kao funkciju $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadanu s

$$f : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

Osnovni pojmovi i definicije

Funkciju f možemo shvaćati i kao funkciju $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadanu s

$$f : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

Na primjer, neka je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadana s $f(z) = z^2$. Tada je

$$f(x + yi) = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\, i.$$

Osnovni pojmovi i definicije

Funkciju f možemo shvaćati i kao funkciju $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadanu s

$$f : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

Na primjer, neka je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadana s $f(z) = z^2$. Tada je

$$f(x + yi) = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\, i.$$

Dakle, $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$, pa je

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Osnovni pojmovi i definicije

Funkciju f možemo shvaćati i kao funkciju $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadanu s

$$f : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

Na primjer, neka je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadana s $f(z) = z^2$. Tada je

$$f(x + yi) = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xy\, i.$$

Dakle, $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$, pa je

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Iz tog prikaza je jasno da je riječ o neprekidnoj funkciji.

Osnovni pojmovi i definicije

Na sličan način možemo definirati polinome $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

Osnovni pojmovi i definicije

Na sličan način možemo definirati polinome $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

Svaki je polinom neprekidna funkcija na $\mathbb{C}$, jer su mu realni i imaginarni dio polinomi u x i y.

Osnovni pojmovi i definicije

Na sličan način možemo definirati polinome $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,$$

gdje je $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

Svaki je polinom neprekidna funkcija na $\mathbb{C}$, jer su mu realni i imaginarni dio polinomi u x i y.

Možemo definirati i racionalne funkcije kao kvocijente dva polinoma; one će biti neprekidne tamo gdje su definirane.

Derivabilnost funkcije

Pojmovi derivabilnosti i derivacije funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$ različiti su od pojmova diferencijabilnosti i diferencijala funkcije f shvaćene kao funkcije s $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$ (te ćemo pojmove uskoro usporediti).

Derivabilnost funkcije

Pojmovi derivabilnosti i derivacije funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$ različiti su od pojmova diferencijabilnosti i diferencijala funkcije f shvaćene kao funkcije s $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$ (te ćemo pojmove uskoro usporediti).

Definicija derivabilnosti funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je analogna derivabilnosti realne funkcije realne varijable.

Derivabilnost funkcije

Pojmovi derivabilnosti i derivacije funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$ različiti su od pojmova diferencijabilnosti i diferencijala funkcije f shvaćene kao funkcije s $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$ (te ćemo pojmove uskoro usporediti).

Definicija derivabilnosti funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je analogna derivabilnosti realne funkcije realne varijable.

Neka je zadana funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $z_0 \in \Omega$. Funkcija f je **derivabilna** u točki z_0 ako postoji

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{1}$$

Derivabilnost funkcije

Pojmovi derivabilnosti i derivacije funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$ različiti su od pojmova diferencijabilnosti i diferencijala funkcije f shvaćene kao funkcije s $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$ (te ćemo pojmove uskoro usporediti).

Definicija derivabilnosti funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je analogna derivabilnosti realne funkcije realne varijable.

Neka je zadana funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ i $z_0 \in \Omega$. Funkcija f je **derivabilna** u točki z_0 ako postoji

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{1}$$

Ukoliko taj limes postoji, označavamo ga s $f'(z_0)$ i nazivamo **derivacijom funkcije f u točki z_0**.

Derivabilnost funkcije

Funkcija f je **derivabilna na Ω** ako je derivabilna u svakoj točki skupa Ω. Još kažemo da je f **holomorfna na Ω**.

Derivabilnost funkcije

Funkcija f je **derivabilna na** Ω ako je derivabilna u svakoj točki skupa Ω. Još kažemo da je f **holomorfna na** Ω.

Uz zamjenu varijabli $z = z_0 + h$ limes u (**??**) ima oblik

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \tag{2}$$

(Nekad je spretnije raditi s ovom formulom.)

Derivabilnost funkcije

Funkcija f je **derivabilna na** Ω ako je derivabilna u svakoj točki skupa Ω. Još kažemo da je f **holomorfna na** Ω.

Uz zamjenu varijabli $z = z_0 + h$ limes u (**??**) ima oblik

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \tag{2}$$

(Nekad je spretnije raditi s ovom formulom.)

U ovom će nas kolegiju zanimati samo funkcije koje su derivabilne na otvorenim skupovima u $\mathbb{C}$. Vidjet ćemo da takve funkcije imaju mnogo bolja svojstva nego diferencijabilne funkcije u realnoj analizi.

Primjer

Izračunajmo, ako postoji, derivaciju funkcije $f(z) = z^2$ u proizvoljnoj točki $z_0 \in \mathbb{C}$.

Primjer

Izračunajmo, ako postoji, derivaciju funkcije $f(z) = z^2$ u proizvoljnoj točki $z_0 \in \mathbb{C}$.

Imamo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)}{z - z_0}$$
$$= \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0.$$

Svojstva derivacije

Sljedeće se tvrdnje provjeravaju na isti način kao i kod realnih funkcija realne varijable:

Svojstva derivacije

Sljedeće se tvrdnje provjeravaju na isti način kao i kod realnih funkcija realne varijable:

Neka su $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcije i $z_0 \in \Omega$. Tada vrijedi:

(i) Ako je f derivabilna u z_0, onda je f neprekidna u z_0.

Svojstva derivacije

Sljedeće se tvrdnje provjeravaju na isti način kao i kod realnih funkcija realne varijable:

Neka su $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcije i $z_0 \in \Omega$. Tada vrijedi:

(i) Ako je f derivabilna u z_0, onda je f neprekidna u z_0.

Posebno, ako je f derivabilna na Ω onda je i neprekidna na Ω.

Svojstva derivacije

Sljedeće se tvrdnje provjeravaju na isti način kao i kod realnih funkcija realne varijable:

Neka su $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcije i $z_0 \in \Omega$. Tada vrijedi:

(i) Ako je f derivabilna u z_0, onda je f neprekidna u z_0.

Posebno, ako je f derivabilna na Ω onda je i neprekidna na Ω.

Zaista, ako postoji $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ tada je

$$\lim_{z\to z_0} f(z) - f(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) = 0.$$

Svojstva derivacije

(ii) Ako su f i g derivabilne u z_0 tada:

1. Za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ je funkcija $\lambda f + \mu g$ derivabilna u z_0 i

$$(\lambda f + \mu g)'(z_0) = \lambda f'(z_0) + \mu g'(z_0).$$

Svojstva derivacije

(ii) Ako su f i g derivabilne u z_0 tada:

1. Za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ je funkcija $\lambda f + \mu g$ derivabilna u z_0 i

$$(\lambda f + \mu g)'(z_0) = \lambda f'(z_0) + \mu g'(z_0).$$

2. fg je derivabilna u z_0 i

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

Svojstva derivacije

(ii) Ako su f i g derivabilne u z_0 tada:

1. Za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ je funkcija $\lambda f + \mu g$ derivabilna u z_0 i
$$(\lambda f + \mu g)'(z_0) = \lambda f'(z_0) + \mu g'(z_0).$$
2. fg je derivabilna u z_0 i
$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$
3. Ako $g(z_0) \neq 0$, onda je $\dfrac{f}{g}$ derivabilna u z_0 i vrijedi
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.$$

Svojstva derivacije

(iii) Neka je $g : \Omega_1 \to \mathbb{C}$, gdje je Ω_1 otvoren skup koji sadrži $f(\Omega)$. Ako je f derivabilna u točki z_0 i g derivabilna u $f(z_0)$, tada je $g \circ f$ derivabilna u z_0 i vrijedi

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Svojstva derivacije

(iii) Neka je $g : \Omega_1 \to \mathbb{C}$, gdje je Ω_1 otvoren skup koji sadrži $f(\Omega)$. Ako je f derivabilna u točki z_0 i g derivabilna u $f(z_0)$, tada je $g \circ f$ derivabilna u z_0 i vrijedi

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Iz gornjih formula odmah slijedi da su polinomi derivabilne funkcije. Preciznije, ako je

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, tada je

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Svojstva derivacije

(iii) Neka je $g : \Omega_1 \to \mathbb{C}$, gdje je Ω_1 otvoren skup koji sadrži $f(\Omega)$. Ako je f derivabilna u točki z_0 i g derivabilna u $f(z_0)$, tada je $g \circ f$ derivabilna u z_0 i vrijedi

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Iz gornjih formula odmah slijedi da su polinomi derivabilne funkcije. Preciznije, ako je

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, tada je

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Racionalne funkcije su također derivabilne na svojoj domeni.

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Sjetimo se da smo funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ pisali u obliku $f = u + iv$, gdje je $u = \operatorname{Re} f$ i $v = \operatorname{Im} f$. Također, funkcija f je u jednoznačnoj korespondenciji s funkcijom $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadanom s

$$f : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Sjetimo se da smo funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ pisali u obliku $f = u + iv$, gdje je $u = \operatorname{Re} f$ i $v = \operatorname{Im} f$. Također, funkcija f je u jednoznačnoj korespondenciji s funkcijom $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadanom s

$$f : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

Prisjetimo se definicije diferencijabilnosti iz diferencijalnog računa funkcija više (realnih) varijabli:

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Sjetimo se da smo funkciju $f : \Omega \to \mathbb{C}$ pisali u obliku $f = u + iv$, gdje je $u = \operatorname{Re} f$ i $v = \operatorname{Im} f$. Također, funkcija f je u jednoznačnoj korespondenciji s funkcijom $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadanom s

$$f : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)).$$

Prisjetimo se definicije diferencijabilnosti iz diferencijalnog računa funkcija više (realnih) varijabli:

Funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je diferencijabilna u točki $(x_0, y_0) \in \Omega$ ako postoji linearan operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ takav da vrijedi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\|f(x, y) - f(x_0, y_0) - A(x - x_0, y - y_0)\|}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Ako takav operator A postoji, onda je on jedinstven i naziva se diferencijalom funkcije f u (x_0, y_0).

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Ako takav operator A postoji, onda je on jedinstven i naziva se diferencijalom funkcije f u (x_0, y_0).

Njegova matrica u standardnoj bazi je

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix};$$

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Ako takav operator A postoji, onda je on jedinstven i naziva se diferencijalom funkcije f u (x_0, y_0).

Njegova matrica u standardnoj bazi je

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix};$$

posebno, postoje parcijalne derivacije funkcija u i v u (x_0, y_0).

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Drugim riječima, funkcija $f = (u, v) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je diferencijabilna na Ω ako i samo ako u svakoj točki $(x_0, y_0) \in \Omega$ postoje parcijalne derivacije funkcija u i v, i vrijedi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left\| f(x,y) - f(x_0,y_0) - \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} (x - x_0, y - y_0) \right\|}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0.$$

Cauchy-Riemannovi uvjeti

S druge strane, funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je diferencijabilna na Ω kao kompleksna funkcija kompleksne varijable ako i samo ako za svaki $z_0 \in \Omega$ postoji kompleksan broj $f'(z_0)$ takav da je

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0),$$

Cauchy-Riemannovi uvjeti

S druge strane, funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je diferencijabilna na Ω kao kompleksna funkcija kompleksne varijable ako i samo ako za svaki $z_0 \in \Omega$ postoji kompleksan broj $f'(z_0)$ takav da je

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0),$$

što je ekvivalentno sa

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0.$$

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Uz identifikaciju $z = (x, y)$ i $z_0 = (x_0, y_0)$, vidimo da su te dvije vrste diferencijabilnosti vrlo slične, jedino što u karakterizaciji kompleksne diferencijabilnosti ulogu diferencijala preuzima linearni operator kompleksnog množenja brojem $f'(z_0)$.

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Uz identifikaciju $z = (x, y)$ i $z_0 = (x_0, y_0)$, vidimo da su te dvije vrste diferencijabilnosti vrlo slične, jedino što u karakterizaciji kompleksne diferencijabilnosti ulogu diferencijala preuzima linearni operator kompleksnog množenja brojem $f'(z_0)$.

Uz identifikaciju $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^2$ postaje $(1, i)$, a operator množenja kompleksnim brojem $a + bi$ u toj bazi ima matricu

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Uz identifikaciju $z = (x, y)$ i $z_0 = (x_0, y_0)$, vidimo da su te dvije vrste diferencijabilnosti vrlo slične, jedino što u karakterizaciji kompleksne diferencijabilnosti ulogu diferencijala preuzima linearni operator kompleksnog množenja brojem $f'(z_0)$.

Uz identifikaciju $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^2$ postaje $(1, i)$, a operator množenja kompleksnim brojem $a + bi$ u toj bazi ima matricu

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

To odmah slijedi iz toga što je

$$(a + bi)1 = a + bi; \qquad (a + bi)i = -b + ai$$

i iz toga što se matrica pridružena operatoru A u bazi (e_j) dobiva tako da se u k-ti stupac stave koeficijenti vektora Ae_k u bazi (e_j).

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Dakle (kompleksna) derivabilnost je ekvivalentna (realnoj) diferencijabilnosti, uz dodatni uvjet da je Jacobijeva matrica oblika

$$\begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

pri čemu je $f'(z_0) = a + bi$. Dokazali smo

Teorem (Cauchy-Riemannovi uvjeti)

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija, $z_0 \in \Omega$. Neka je $f = u + iv$.

Teorem (Cauchy-Riemannovi uvjeti)

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija, $z_0 \in \Omega$. Neka je $f = u + iv$.

Tada je f derivabilna u točki z_0 (tj. postoji limes (**??**)) ako i samo ako je funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferencijabilna u točki (x_0, y_0) i vrijede **Cauchy–Riemannovi uvjeti**:

$$
\begin{aligned}
u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0), \\
u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0).
\end{aligned}
$$

Teorem (Cauchy-Riemannovi uvjeti)

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcija, $z_0 \in \Omega$. Neka je $f = u + iv$.

Tada je f derivabilna u točki z_0 (tj. postoji limes (**??**)) ako i samo ako je funkcija $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferencijabilna u točki (x_0, y_0) i vrijede **Cauchy–Riemannovi uvjeti**:

$$
\begin{aligned}
u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0), \\
u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0).
\end{aligned}
$$

U tom slučaju vrijedi

$$
f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0).
$$

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Iz diferencijalnog računa funkcija više (realnih) varijabli znamo da je dovoljan uvjet diferencijabilnosti funkcije f na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ postojanje i neprekidnost parcijalnih derivacija komponenata u i v na Ω.

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Iz diferencijalnog računa funkcija više (realnih) varijabli znamo da je dovoljan uvjet diferencijabilnosti funkcije f na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ postojanje i neprekidnost parcijalnih derivacija komponenata u i v na Ω.

Ako parcijalne derivacije još i zadovoljavaju Cauchy–Riemannove uvjete, onda gornji teorem povlači da je f derivabilna kao funkcija kompleksne varijable.

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Na primjer, za funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ imamo

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy), \quad \text{dakle} \quad u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Na primjer, za funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ imamo

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy), \quad \text{dakle} \quad u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy.$$

Parcijalne derivacije

$$u_x(x,y) = 2x, \quad u_y(x,y) = -2y, \quad v_x(x,y) = 2y, \quad v_y(x,y) = 2x$$

postoje i neprekidne su na $\mathbb{R}^2$, pa je f diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$.

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Na primjer, za funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ imamo

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy), \quad \text{dakle} \quad u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy.$$

Parcijalne derivacije

$$u_x(x,y) = 2x, \quad u_y(x,y) = -2y, \quad v_x(x,y) = 2y, \quad v_y(x,y) = 2x$$

postoje i neprekidne su na $\mathbb{R}^2$, pa je f diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$.

Cauchy-Riemannovi uvjeti su zadovoljeni:

$$u_x(x,y) = 2x = v_y(x,y), \qquad u_y(x,y) = -2y = -v_x(x,y).$$

Cauchy-Riemannovi uvjeti

Na primjer, za funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ imamo

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy), \quad \text{dakle} \quad u(x,y) = x^2 - y^2, \quad v(x,y) = 2xy.$$

Parcijalne derivacije

$$u_x(x,y) = 2x, \quad u_y(x,y) = -2y, \quad v_x(x,y) = 2y, \quad v_y(x,y) = 2x$$

postoje i neprekidne su na $\mathbb{R}^2$, pa je f diferencijabilna na $\mathbb{R}^2$.

Cauchy-Riemannovi uvjeti su zadovoljeni:

$$u_x(x,y) = 2x = v_y(x,y), \qquad u_y(x,y) = -2y = -v_x(x,y).$$

Prema tome, f je derivabilna na $\mathbb{C}$, i vrijedi

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 2x + i2y = 2z,$$

kao što smo i ranije zaključili direktnim računanjem derivacije.

Eksponencijalna funkcija

Složeniji je primjer kompleksne eksponencijalne funkcije.

Eksponencijalna funkcija

Složeniji je primjer kompleksne eksponencijalne funkcije.

Ona je definirana tako da proširuje dobro poznatu realnu eksponencijalnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$:

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \exp(x + iy) = e^x \left(\cos y + i \sin y\right).$$

Eksponencijalna funkcija

Složeniji je primjer kompleksne eksponencijalne funkcije.

Ona je definirana tako da proširuje dobro poznatu realnu eksponencijalnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$:

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \exp(x + iy) = e^x \left(\cos y + i \sin y\right).$$

Ako je $z = x \in \mathbb{R}$ (tj. ako je $y = 0$) tada je

$$\exp(z) = \exp(x + i \cdot 0) = e^x \left(\cos 0 + i \sin 0\right) = e^x,$$

pa je restrikcija kompleksne eksponencijalne funkcije na $\mathbb{R}$ upravo realna eksponencijalna funkcija.

Eksponencijalna funkcija

Složeniji je primjer kompleksne eksponencijalne funkcije.

Ona je definirana tako da proširuje dobro poznatu realnu eksponencijalnu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$:

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \exp(x + iy) = e^x (\cos y + i \sin y) .$$

Ako je $z = x \in \mathbb{R}$ (tj. ako je $y = 0$) tada je

$$\exp(z) = \exp(x + i \cdot 0) = e^x (\cos 0 + i \sin 0) = e^x ,$$

pa je restrikcija kompleksne eksponencijalne funkcije na $\mathbb{R}$ upravo realna eksponencijalna funkcija.

Često ćemo $\exp(z)$ označavati sa e^z.

Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija je derivabilna na $\mathbb{C}$, i vrijedi $\exp'(z) = \exp(z)$. Naime, komponente funkcije exp,

$$u(x,y) = e^x \cos y, \qquad v(x,y) = e^x \sin y$$

očito imaju neprekidne parcijalne derivacije na $\mathbb{C}$, pa je f diferencijabilna kao funkcija s $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$.

Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija je derivabilna na $\mathbb{C}$, i vrijedi $\exp'(z) = \exp(z)$. Naime, komponente funkcije exp,

$$u(x,y) = e^x \cos y, \qquad v(x,y) = e^x \sin y$$

očito imaju neprekidne parcijalne derivacije na $\mathbb{C}$, pa je f diferencijabilna kao funkcija s $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$.

Nadalje,

$$u_x(x,y) = e^x \cos y = v_y(x,y), \qquad u_y(x,y) = -e^x \sin y = -v_x(x,y),$$

pa su zadovoljeni CR uvjeti, dakle je f derivabilna kao funkcija sa $\mathbb{C}$ u $\mathbb{C}$. Štoviše, vrijedi

$$\exp'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = \exp(z).$$

Eksponencijalna funkcija

Navedimo još neka svojstva eksponencijalne funkcije. Osnovna relacija

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

slijedi direktno iz definicije, koristeći svojstva realne eksponencijalne funkcije kao i funkcija sin i cos (adicione formule).

Eksponencijalna funkcija

Navedimo još neka svojstva eksponencijalne funkcije. Osnovna relacija

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

slijedi direktno iz definicije, koristeći svojstva realne eksponencijalne funkcije kao i funkcija sin i cos (adicione formule).

Iz osnovne relacije odmah slijedi

$$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

i posebno

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z}, \quad z \in \mathbb{C}$$

.

Eksponencijalna funkcija

Nadalje, za svaki $z = x + iy \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$|e^z| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x > 0.$$

Eksponencijalna funkcija

Nadalje, za svaki $z = x + iy \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$|e^z| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x > 0.$$

Odavde zaključujemo da je

$$e^z \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Eksponencijalna funkcija

Nadalje, za svaki $z = x + iy \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$|e^z| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x > 0.$$

Odavde zaključujemo da je

$$e^z \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Dakle 0 nije u slici eksponencijalne funkcije, a iz definicije vidimo da svi ostali kompleksni brojevi jesu.

Eksponencijalna funkcija

Nadalje, za svaki $z = x + iy \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$|e^z| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x > 0.$$

Odavde zaključujemo da je

$$e^z \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Dakle 0 nije u slici eksponencijalne funkcije, a iz definicije vidimo da svi ostali kompleksni brojevi jesu.

Naime, za $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ vidimo da je

$$z = e^{\ln|z| + i\varphi}.$$

Eksponencijalna funkcija

Nadalje, za svaki $z = x + iy \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$|e^z| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x > 0.$$

Odavde zaključujemo da je

$$e^z \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Dakle 0 nije u slici eksponencijalne funkcije, a iz definicije vidimo da svi ostali kompleksni brojevi jesu.

Naime, za $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ vidimo da je

$$z = e^{\ln|z| + i\varphi}.$$

Prema tome, eksponencijalna funkcija je surjekcija na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Eksponencijalna funkcija

Uočimo još da je eksponencijalna funkcija periodična s periodom $2\pi i$, jer je

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+i(y+2\pi)} = e^x \left(\cos\left(y+2\pi\right) + i \sin\left(y+2\pi\right)\right) = \\ &= e^x \left(\cos y + i \sin y\right) = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Eksponencijalna funkcija

Uočimo još da je eksponencijalna funkcija periodična s periodom $2\pi i$, jer je

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+i(y+2\pi)} = e^x\left(\cos\left(y+2\pi\right)+i\sin\left(y+2\pi\right)\right) = \\ &= e^x\left(\cos y + i\sin y\right) = e^z, \quad \forall z\in\mathbb{C}. \end{aligned}$$

Prema tome, $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ nije injekcija, pa niti bijekcija.

Eksponencijalna funkcija

Promotrimo sada ponašanje eksponencijalne funkcije na nekim podskupovima domene. Uzmimo $x_0 \in \mathbb{R}$, proizvoljan i fiksiran. Skup

$$\{x_0 + iy : y \in \mathbb{R}\}$$

je vertikalni pravac koji realnu os siječe u x_0. Što je slika tog pravca po eksponencijalnoj funkciji?

Eksponencijalna funkcija

Promotrimo sada ponašanje eksponencijalne funkcije na nekim podskupovima domene. Uzmimo $x_0 \in \mathbb{R}$, proizvoljan i fiksiran. Skup

$$\{x_0 + iy : y \in \mathbb{R}\}$$

je vertikalni pravac koji realnu os siječe u x_0. Što je slika tog pravca po eksponencijalnoj funkciji?

Iz

$$e^{x_0+iy} = e^{x_0}(\cos y + i \sin y), \quad y \in \mathbb{R}$$

slijedi da je to kružnica sa središtem u ishodištu radijusa e^{x_0}.

Eksponencijalna funkcija

Promotrimo sada ponašanje eksponencijalne funkcije na nekim podskupovima domene. Uzmimo $x_0 \in \mathbb{R}$, proizvoljan i fiksiran. Skup

$$\{x_0 + iy : y \in \mathbb{R}\}$$

je vertikalni pravac koji realnu os siječe u x_0. Što je slika tog pravca po eksponencijalnoj funkciji?

Iz

$$e^{x_0+iy} = e^{x_0}(\cos y + i \sin y), \quad y \in \mathbb{R}$$

slijedi da je to kružnica sa središtem u ishodištu radijusa e^{x_0}.

Prema tome, vertikalni pravci domene se preslikavaju u kružnice sa središtem u ishodištu.

Eksponencijalna funkcija

Uzmimo sada $y_0 \in \mathbb{R}$, opet proizvoljan i fiksiran. Skup

$$\{x + iy_0 : x \in \mathbb{R}\}$$

je horizontalni pravac koji imaginarnu os siječe u iy_0.

Eksponencijalna funkcija

Uzmimo sada $y_0 \in \mathbb{R}$, opet proizvoljan i fiksiran. Skup

$$\{x + iy_0 : x \in \mathbb{R}\}$$

je horizontalni pravac koji imaginarnu os siječe u iy_0.

Iz

$$e^{x+iy_0} = e^x(\cos y_0 + i \sin y_0), \quad x \in \mathbb{R}$$

slijedi da se ovaj pravac preslikava u polupravac (zraku) iz ishodišta (bez ishodišta) koja s pozitivnim dijelom realne osi čini kut y_0.

Eksponencijalna funkcija

Uzmimo sada $y_0 \in \mathbb{R}$, opet proizvoljan i fiksiran. Skup

$$\{x + iy_0 : x \in \mathbb{R}\}$$

je horizontalni pravac koji imaginarnu os siječe u iy_0.

Iz

$$e^{x+iy_0} = e^x(\cos y_0 + i \sin y_0), \quad x \in \mathbb{R}$$

slijedi da se ovaj pravac preslikava u polupravac (zraku) iz ishodišta (bez ishodišta) koja s pozitivnim dijelom realne osi čini kut y_0.

Prema tome, horizontalni pravci domene se preslikavaju u zrake iz ishodišta.

Eksponencijalna funkcija

Iako smo već vidjeli da je $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ surjekcija, sada smo se još jednom u to uvjerili, naime, svim ovim polupravcima (kao i svim spomenutim kružnicama) popunjen je cijeli skup $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Eksponencijalna funkcija

Iako smo već vidjeli da je $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ surjekcija, sada smo se još jednom u to uvjerili, naime, svim ovim polupravcima (kao i svim spomenutim kružnicama) popunjen je cijeli skup $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Štoviše, sada uočavamo i da je restrikcija eksponencijalne funkcije

$$\exp|_{\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi]} : \mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{3}$$

pri čemu je

$$\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi] = \{x + iy : x \in \mathbb{R}, y \in \langle -\pi, \pi]\},$$

surjekcija, jer su horizontalni pravci sadržani u domeni dovoljni da se točno jednom prekrije cijela kodomena $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Eksponencijalna funkcija

Štoviše vrijedi

$$e^z = e^w \Leftrightarrow z = w + 2\pi k,\ \ ke \in \mathbb{Z},$$

pa je stoga ova funkcija i bijekcija.

Eksponencijalna funkcija

Štoviše vrijedi

$$e^z = e^w \Leftrightarrow z = w + 2\pi k, \;\; ke \in \mathbb{Z},$$

pa je stoga ova funkcija i bijekcija.

Odredimo inverz bijekcije $\exp : \mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Eksponencijalna funkcija

Štoviše vrijedi

$$e^z = e^w \Leftrightarrow z = w + 2\pi k,\ \ ke \in \mathbb{Z},$$

pa je stoga ova funkcija i bijekcija.

Odredimo inverz bijekcije $\exp : \mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Za $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tražimo $w = u + iv \in \mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi]$ tako da je $e^w = z$. Vrijedi

Eksponencijalna funkcija

Štoviše vrijedi

$$e^z = e^w \Leftrightarrow z = w + 2\pi k,\ \ ke \in \mathbb{Z},$$

pa je stoga ova funkcija i bijekcija.

Odredimo inverz bijekcije $\exp : \mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Za $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tražimo $w = u + iv \in \mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi]$ tako da je $e^w = z$. Vrijedi

$$\begin{aligned} e^w = z \quad &\Leftrightarrow \quad e^u e^{iv} = |z| e^{i\varphi} \\ &\Leftrightarrow \quad e^u = |z|; \quad e^{iv} = e^{i\varphi} \\ &\Leftrightarrow \quad u = \ln|z| \text{ i } v = \varphi, \end{aligned}$$

dakle,

$$w = \ln|z| + i\varphi = \ln|z| + i \arg z.$$

Eksponencijalna funkcija

Dobivena inverzna funkcija nije neprekidna: ako uzmemo niz točaka u IV kvadrantu koji teži prema -1, pripadni argumenti teže prema $-\pi$, dok je $\arg(-1) = \pi$.

Eksponencijalna funkcija

Dobivena inverzna funkcija nije neprekidna: ako uzmemo niz točaka u IV kvadrantu koji teži prema -1, pripadni argumenti teže prema $-\pi$, dok je $\arg(-1) = \pi$.

Zato smanjujemo domenu eksponencijalne funkcije sa $\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi]$ na $\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle$, tj. izbacujemo rubni horizontalni pravac kroz $i\pi$.

Eksponencijalna funkcija

Dobivena inverzna funkcija nije neprekidna: ako uzmemo niz točaka u IV kvadrantu koji teži prema -1, pripadni argumenti teže prema $-\pi$, dok je $\arg(-1) = \pi$.

Zato smanjujemo domenu eksponencijalne funkcije sa $\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi]$ na $\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle$, tj. izbacujemo rubni horizontalni pravac kroz $i\pi$.

To odgovara tome da se iz slike preslikavanja exp, odnosno domene inverzne funkcije, izbaci negativni dio x-osi, odnosno sve točke s argumentom π.

Eksponencijalna funkcija

Dobivena inverzna funkcija nije neprekidna: ako uzmemo niz točaka u IV kvadrantu koji teži prema -1, pripadni argumenti teže prema $-\pi$, dok je $\arg(-1) = \pi$.

Zato smanjujemo domenu eksponencijalne funkcije sa $\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi]$ na $\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle$, tj. izbacujemo rubni horizontalni pravac kroz $i\pi$.

To odgovara tome da se iz slike preslikavanja exp, odnosno domene inverzne funkcije, izbaci negativni dio x-osi, odnosno sve točke s argumentom π.

Na taj način dolazimo do bijekcije

$$\exp|_{\mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle} : \mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle \to \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}. \tag{4}$$

čiji inverz ćemo nazivati logaritamskom funkcijom.

Eksponencijalna funkcija

(Glavna grana) prirodnog logaritma je funkcija

$$\mathrm{ln} : \mathbb{C} \setminus \langle -\infty, 0] \to \mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle, \quad \mathrm{ln}(z) = \mathrm{ln}\,|z| + i \arg z.$$

Eksponencijalna funkcija

(Glavna grana) prirodnog logaritma je funkcija

$$\ln : \mathbb{C} \setminus \langle -\infty, 0] \to \mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle, \quad \ln(z) = \ln|z| + i \arg z.$$

Domena funkcije ln je kompleksna ravnina iz koje je izbačena jedna zraka iz ishodišta - negativni dio realne osi zajedno s ishodištem.

Eksponencijalna funkcija

(Glavna grana) prirodnog logaritma je funkcija

$$\mathrm{Ln} : \mathbb{C} \setminus \langle -\infty, 0] \to \mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle, \quad \mathrm{Ln}(z) = \ln |z| + i \arg z.$$

Domena funkcije Ln je kompleksna ravnina iz koje je izbačena jedna zraka iz ishodišta - negativni dio realne osi zajedno s ishodištem.

Kasnije ćemo vidjeti da je funkcija Ln holomorfna na svojoj domeni, i da joj je derivacija jednaka $\frac{1}{z}$.

Eksponencijalna funkcija

(Glavna grana) prirodnog logaritma je funkcija

$$\mathrm{Ln} : \mathbb{C} \setminus \langle -\infty, 0] \to \mathbb{R} \times \langle -\pi, \pi \rangle, \quad \mathrm{Ln}(z) = \ln |z| + i \arg z.$$

Domena funkcije Ln je kompleksna ravnina iz koje je izbačena jedna zraka iz ishodišta - negativni dio realne osi zajedno s ishodištem.

Kasnije ćemo vidjeti da je funkcija Ln holomorfna na svojoj domeni, i da joj je derivacija jednaka $\frac{1}{z}$.

Naziv "glavna grana" ukazuje na to da smo mogli umjesto negativnog dijela realne osi izbaciti i neku drugu zraku iz ishodišta i analogno dobiti logaritamsku funkciju (tada bismo i argument morali redefinirati na neki drugi interval širine 2π). Ponekad će nam to biti vrlo korisno u dokazima.